

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

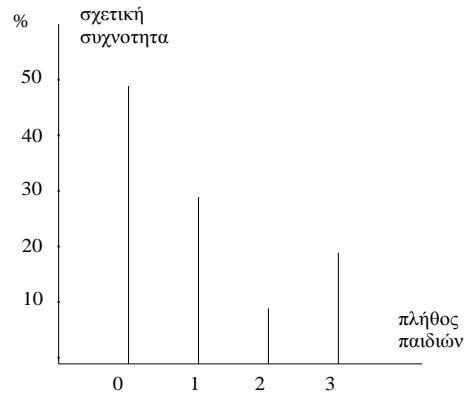
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. Ποίες από τις παρακάτω μεταβλητές είναι ποιοτικές και ποιες ποσοτικές ; Από τις ποσοτικές ποιες είναι διακριτές και ποιες συνεχείς ;
- α) Το μήκος ενός ποταμού .
 - β) Το πλήθος των σελίδων ενός βιβλίου .
 - γ) Το χρώμα των μαλλιών .
 - δ) Το πλήθος των επιβατών που χωράει ένα αυτοκίνητο .
 - ε) Οι πωλήσεις ενός μοντέλου αυτοκινήτου .
 - στ) Το επάγγελμα .
 - ζ) Το βάρος μιας φραντζόλας ψωμιού .
 - η) Η θερμοκρασία ενός δωματίου .
2. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε ποιος είναι ο πληθυσμός και ποια είναι η μεταβλητή ή οι μεταβλητές. Να διακρίνετε ποιες από αυτές είναι ποιοτικές, ποιες συνεχείς και ποιες διακριτές και να αναφέρετε μερικές δυνατές τιμές τους .
- α) Εξετάζουμε πόσοι Έλληνες είναι φορείς του AIDS .
 - β) Εξετάζουμε πόσες Αγγλικές λέξεις είναι Ελληνικής προέλευσης .
 - γ) Εξετάζουμε το βάρος των μαθητών ενός σχολείου .
 - δ) Εξετάζουμε το νούμερο παπουτσιών των μαθητών μιας τάξης .
 - ε) Εξετάζουμε τις επιδόσεις των αθλητών στο άλμα εις ύψος στους Πανευρωπαϊκούς .

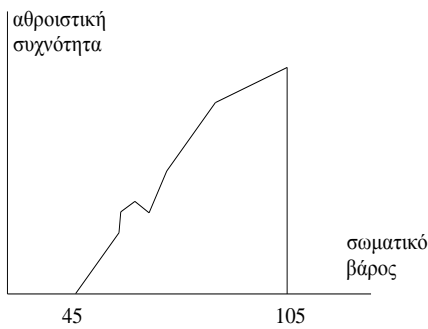
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

1. Μια ομάδα μπάσκετ πέτυχε σ' ένα αγώνα 12 βολές που δίνουν ένα πόντο, 20 δίποντα και 8 τρίποντα. Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα και ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τους πόντους που προήλθαν από βολές, δίποντα ή τρίποντα .

2. Το παραπλεύρως διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται στο πλήθος των υπαλλήλων μιας επιχείρησης. Είναι σωστό? Εξηγήστε γιατί .



3.

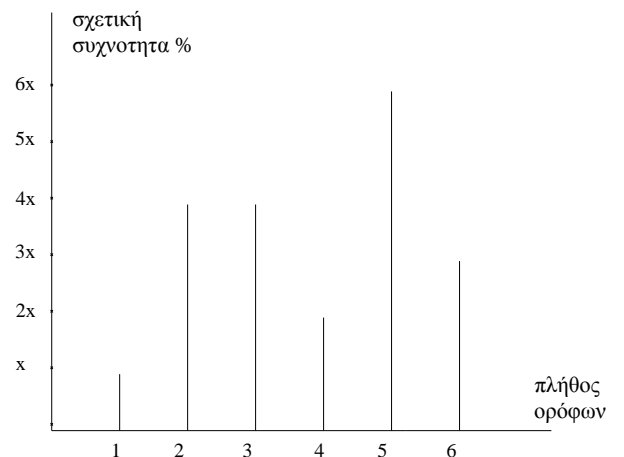


Το παρακάτω πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων αναφέρεται στο σωματικό βάρος δείγματος 200 ανθρώπων. Είναι σωστό; Εξηγήστε γιατί .

4.

Το παραπλεύρως διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται στους ορόφους των κτισμάτων κάποιας πόλης .

- α) Να βρείτε το ποσοστό των κτιρίων που έχουν από 3 ορόφους και άνω .
- β) Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα για το πλήθος των ορόφων .



5.

Οι παραπλεύρως αριθμοί αντιπροσωπεύουν το

5	4	4	6	4	3	5	4	5	3
4	3	5	6	4	5	5	3	4	4
6	3	4	5	5	3	4	4	5	4

πλήθος των ενηλίκων επιβατών 30 διαφορετικών αυτοκινήτων.

α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Να κατασκευαστεί διάγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο .

γ) Να βρείτε το ποσοστό των αυτοκινήτων που μεταφέρει :

- i) τουλάχιστον 5 επιβάτες
- ii) το πολύ 4 επιβάτες
- iii) 4 ή 5 επιβάτες

6.

Να συμπληρώσετε τον παραπλεύρως πίνακα μιας μεταβλητής X.

Μεταβλητή X	Συχνότητα	Σχετ. Συχν.	Σχ.συχν. %	Αθρ. Συχν.	Αθρ.Σχ. Συχν.	Αθρ.Σχ. Συχν.%
X ₁						
X ₂	100			150		
X ₃						67,5
X ₄		0,1				
X ₅				400		

7. Το βάρος (σε εκατοντάδες γραμμάρια) των νεογέννητων βρεφών σε ένα μαιευτήριο

έχουν ομαδοποιηθεί σε έξι κλάσεις ίσου πλάτους. Η πρώτη και η τελευταία κλάση έχουν ίσες συχνότητες (σε κάθε κλάση οι τιμές κατανέμονται ομοιόμορφα).

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στον πίνακα:

Κλάσεις [,)	Κεντρικές τιμές x _i	v _i	f _i %	N _i	F _i %
				2	
	26		16		
					56
		3			
	42				
Σύνολο		25			

β) Να σχεδιάσετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

γ) i. Αν στη θερμοκρασία μπαίνουν τα βρέφη κάτω από 2,5 κιλά πόσα βρέφη βρίσκονται σε αυτή;

ii. Τι βάρος έχουν τα 8 βαρύτερα βρέφη;

8. Τα παρακάτω δεδομένα αντιπροσωπεύουν τις καθυστερήσεις σε λεπτά 30 δρομολογίων μια αμαξοστοιχίας .

14	18	1	24	6	14	4	0	12	5
2	19	11	12	9	2	17	21	13	5
8	15	2	12	10	17	1	16	14	13

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κατάλληλο αριθμό κλάσεων ίσου πλάτους και να κατασκευάσετε πίνακα με τις συχνότητες, σχετικές συχνότητες, αθροιστικές συχνότητες και αθροιστικές σχετικές συχνότητες των κλάσεων αυτών

β) Να κατασκευάσετε τα πολύγωνα σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων .

9. Σ' ένα Πανεπιστημιακό Τμήμα οι φοιτητές κατά την εξέταση στο μάθημα Στατιστική 1, είχαν επιδόσεις που ομαδοποιήθηκαν σε 5 ισοπλατείς κλάσεις. Αν γνωρίζετε ότι:

α) το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 6.

β) η 4^η κλάση απεικονίζεται σε ένα κυκλικό διάγραμμα σε τόξο 72°,

γ) υπάρχουν 2 γραπτά με βαθμολογία μικρότερη του 2,

δ) η 2^η κλάση έχει αθροιστική συχνότητα 5,

ε) η 3^η κλάση έχει ιστόγραμμα συχνοτήτων εμβαδό(του 3-ου ιστού)10, να κατασκευάσετε την κατανομή συχνοτήτων, σχετικών και αθροιστικών συχνοτήτων.

10. Δίνεται ένα πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων f_i % με κορυφές τα σημεία A(-3, 0),

B(3, 20), Γ(9, 10), Δ(15, 30), E(21, 20), Z(27, 20), H(33, 0).

i. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων f_i %.

ii. Να κατασκευάσετε ένα πίνακα συχνοτήτων με στήλες x_i , f_i %, f_i , F_i , F_i %.

iii. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από την τιμή 14.

Να βρείτε την τιμή x έτσι, ώστε το 65% των παρατηρήσεων να βρίσκεται πάνω από αυτήν την τιμή.

11. Η σχετική συχνότητα F_i % σ' ένα δείγμα μεγέθους n μιας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο $F_i\% = 3i^2 + 5i$.

i. Να βρεθούν τα f_1 , f_2 .

ii. Να αποδειχθεί ότι $f_i\% = 6i + 2$.

iii. Να βρεθεί το πλήθος των παρατηρήσεων x_i του δείγματος.

iv. Αν το πλήθος των τιμών των παρατηρήσεων είναι μικρότερες ή ίσες της παρατήρησης x_3 είναι 42, να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος και να κατασκευαστεί ο πίνακας αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

12. Η σχετική συχνότητα f_i των τιμών x_i , $i = 1, 2, \dots, \kappa$ μιας μεταβλητής X σε ένα δείγμα μεγέθους n δίνεται από τον τύπο $f_i = \frac{6i + 10}{100}$.

- i) Να βρεθεί το πλήθος των τιμών x_i .
- ii) Αν η τιμή x_i έχει συχνότητα 32, να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος και η συχνότητα v_i .
- iii) Να βρεθεί η αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$.

13. Οι τιμές x_1, x_2, x_3, x_4 μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n έχουν σχετικές συχνότητες $\frac{1}{10} - \kappa, \frac{1}{5} - 2\kappa, \frac{3}{10} + \kappa^2, \frac{2}{5} + \kappa$ αντίστοιχα.

- i) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό κ .
- ii) Αν η απόλυτη συχνότητα της τιμής x_3 είναι 30, να υπολογίσετε το μέγεθος n του δείγματος και να βρείτε τις υπόλοιπες απόλυτες συχνότητες.

14. Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 με $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ οι τιμές μιας μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n . Αν ισχύει $f_i = \frac{i}{5\kappa}$, $i = 1, 2, \dots, 4$.

- i) Να βρεθεί το κ .
- ii) Αν $v_3 = 30$ να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος καθώς και οι υπόλοιπες συχνότητες.
- iii) Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

15. Το διπλανό κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τις προτιμήσεις 720 ατόμων σε 4 τηλεοπτικά κανάλια. Αν $(\alpha + \beta)^\circ, (2\alpha + 42)^\circ, (3\beta - 15)^\circ, \beta^\circ$ είναι οι γωνίες των κυκλικών τομέων του διαγράμματος και $\alpha + \beta = 81$ τότε:

- i) Να βρείτε τα α, β .
- ii) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων, καθώς και το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

16. Δίνεται το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.

Αν το μέγεθος του δείγματος είναι 50 και ισχύει

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{1}{3} \text{ τότε:}$$

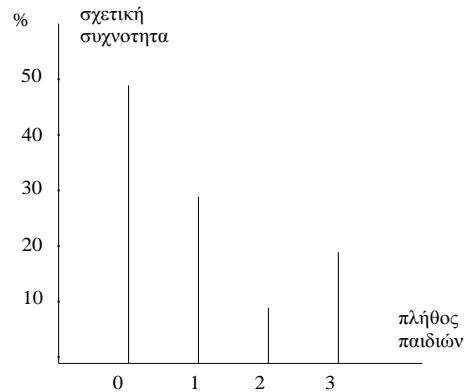
- i) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
- ii) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

Σ. 3

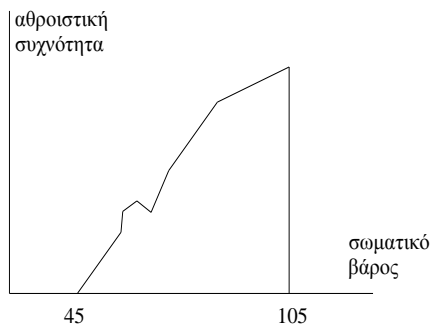
ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

1. Μια ομάδα μπάσκετ πέτυχε σ' ένα αγώνα 12 βολές που δίνουν ένα πόντο, 20 δίποντα και 8 τρίποντα. Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα και ραβόγραμμα σχετικών συχνοτήτων για τους πόντους που προήλθαν από βολές, δίποντα ή τρίποντα .

2. Το παραπλεύρως διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται στο πλήθος των υπαλλήλων μιας επιχείρησης. Είναι σωστό; Εξηγήστε γιατί .



3.



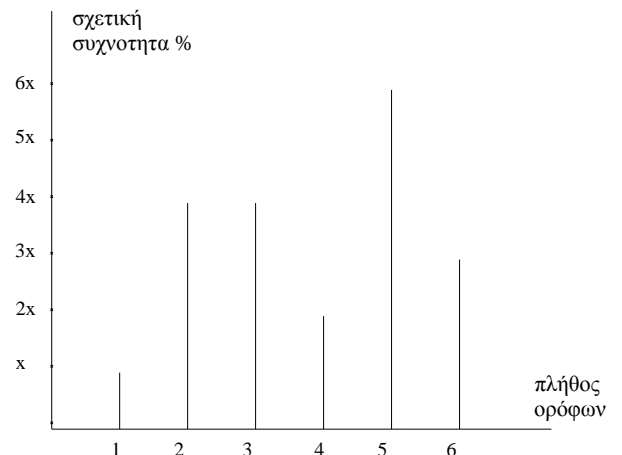
Το παρακάτω πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων αναφέρεται στο σωματικό βάρος δείγματος 200 ανθρώπων. Είναι σωστό; Εξηγήστε γιατί .

4.

Το παραπλεύρως διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται στους ορόφους των κτισμάτων κάποιας πόλης .

α) Να βρείτε το ποσοστό των κτιρίων που έχουν από 3 ορόφους και άνω .

β) Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα για το πλήθος των ορόφων .



5.

Οι παραπλεύρως αριθμοί αντιπροσωπεύουν το πλήθος των ενηλίκων επιβατών 30 διαφορετικών αυτοκινήτων.

5	4	4	6	4	3	5	4	5	3
4	3	5	6	4	5	5	3	4	4
6	3	4	5	5	3	4	4	5	4

α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Να κατασκευαστεί διάγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο .

γ) Να βρείτε το ποσοστό των αυτοκινήτων που μεταφέρει :

- iv) τουλάχιστον 5 επιβάτες
- v) το πολύ 4 επιβάτες
- vi) 4 ή 5 επιβάτες

6.

Μεταβλητή X	Συχνότητα	Σχετ. Συχν.	Σχ.συχν. %	Αθρ. Συχν.	Αθρ.Σχ. Συχν.	Αθρ.Σχ. Συχν.%
X ₁						
X ₂	100			150		
X ₃						67,5
X ₄		0,1				
X ₅				400		

Να συμπληρώσετε τον παραπλεύρως πίνακα μιας μεταβλητής X .

7. Το βάρος (σε εκατοντάδες γραμμάρια) των νεογέννητων βρεφών σε ένα μαιευτήριο έχουν ομαδοποιηθεί σε έξι κλάσεις ίσου πλάτους. Η πρώτη και η τελευταία κλάση έχουν ίσες συχνότητες (σε κάθε κλάση οι τιμές κατανέμονται ομοιόμορφα).

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στον πίνακα:

Κλάσεις [,)	Κεντρικές τιμές x _i	v _i	f _i %	N _i	F _i %
				2	
	26		16		
					56
		3			
	42				
Σύνολο		25			

β) Να σχεδιάσετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

γ) i. Αν στη θερμοκρασία μπαίνουν τα βρέφη κάτω από 2,5 κιλά πόσα βρέφη βρίσκονται σε αυτή;

ii. Τι βάρος έχουν τα 8 βαρύτερα βρέφη;

8. Τα παρακάτω δεδομένα αντιπροσωπεύουν τις καθυστερήσεις σε λεπτά 30 δρομολογίων μια αμαξοστοιχίας .

14	18	1	24	6	14	4	0	12	5
2	19	11	12	9	2	17	21	13	5
8	15	2	12	10	17	1	16	14	13

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κατάλληλο αριθμό κλάσεων ίσου πλάτους και να κατασκευάσετε πίνακα με τις συχνότητες, σχετικές συχνότητες, αθροιστικές συχνότητες και αθροιστικές σχετικές συχνότητες των κλάσεων αυτών

β) Να κατασκευάσετε τα πολύγωνα σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων .

9. Σ' ένα Πανεπιστημιακό Τμήμα οι φοιτητές κατά την εξέταση στο μάθημα Στατιστική 1, είχαν επιδόσεις που ομαδοποιήθηκαν σε 5 ισοπλατείς κλάσεις. Αν γνωρίζετε ότι:

α) το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 6.

β) η 4^η κλάση απεικονίζεται σε ένα κυκλικό διάγραμμα σε τόξο 72°,

γ) υπάρχουν 2 γραπτά με βαθμολογία μικρότερη του 2,

δ) η 2^η κλάση έχει αθροιστική συχνότητα 5,

ε) η 3^η κλάση έχει ιστόγραμμα συχνοτήτων εμβαδό(του 3-ου ιστού)10, να κατασκευάσετε την κατανομή συχνοτήτων, σχετικών και αθροιστικών συχνοτήτων.

10. Δίνεται ένα πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων f_i % με κορυφές τα σημεία Α(-3, 0),

Β(3, 20), Γ(9, 10), Δ(15, 30), Ε(21, 20), Ζ(27, 20), Η(33, 0).

iv. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων f_i %.

v. Να κατασκευάσετε ένα πίνακα συχνοτήτων με στήλες x_i , f_i %, f_i , F_i , F_i %.

vi. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από την τιμή 14.

vii. Να βρείτε την τιμή x έτσι, ώστε το 65% των παρατηρήσεων να βρίσκεται πάνω από αυτήν την τιμή.

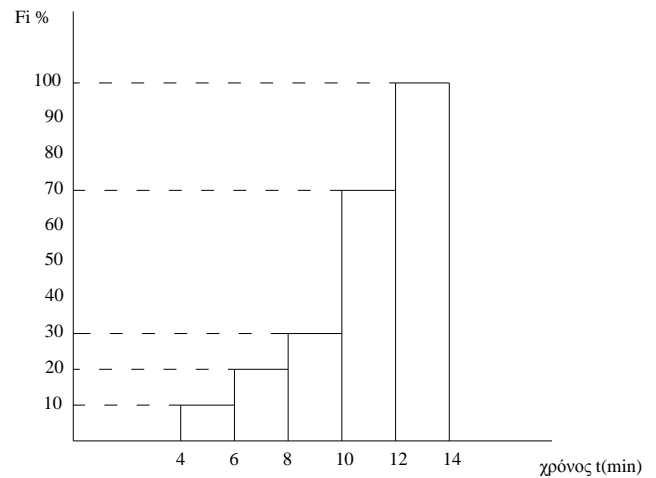
11.

Μισθός (εκατοντάδες €)	Υπάλληλοι
[2, 4)	10
[4, 6)	
[6, 8)	
[8, 10)	15
[10, 12]	5
Σύνολο	80

Δίνεται η παρακάτω κατανομή της μισθοδοσίας (σε εκατοντάδες ευρώ) των 80 υπαλλήλων μιας επιχείρησης. Αν είναι γνωστό ότι η διάμεσος είναι 640€, να βρεθούν οι συχνότητες v_2 και v_3 .

12. Δίνεται το διπλανό ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων, το οποίο περιγράφει το χρόνο (σε min) που χρειάζονται οι οδηγοί να διανύσουν μια συγκεκριμένη απόσταση 8 Km.

- Να βρεθεί η μέση τιμή της ταχύτητας των οδηγών.
- Να βρεθεί η ταχύτητα που πρέπει να έχει ένας οδηγός, ώστε να περιλαμβάνει στο 15% των πιο «γρήγορων».
- Αν το όριο ταχύτητας για τη συγκεκριμένη διαδρομή είναι 50 Km/h, να βρεθεί η πιθανότητα να δεχθεί κλήση ένας οδηγός.



13. Η βαθμολογία στα γραπτά 50 μαθητών κυμάνθηκε από 10 έως 20. Χωρίζοντας τους 50 βαθμούς των αντίστοιχων γραπτών σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους και κατασκευάζοντας ιστόγραμμα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων καθώς και κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, παρατηρήσαμε ότι :

- στο ιστόγραμμα συχνοτήτων, το εμβαδόν του ορθογωνίου της κλάσης 10-12 ισούται με 5.
- στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων (επί τοις εκατό), το ύψος του ορθογωνίου της κλάσης 16-18 είναι 20.
- στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, το τόξο που αντιστοιχεί στην κλάση 14-16 είναι 144° .

Αν οι μαθητές που το γραπτό τους βαθμολογήθηκε με 12-14 είναι τετραπλάσιοι από τους μαθητές που βαθμολογήθηκαν με 18-20, να δείξετε ότι :

- Το πλάτος της κλάσης είναι 2.
- Οι μαθητές με βαθμό 18-20 είναι 3.
- Να γίνει πίνακας κατανομής συχνοτήτων και να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος από τα ανάλογα ιστογράμματα.

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

1. Έστω \bar{x} η μέση τιμή της μεταβλητής x ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα. Τότε η μέση τιμή \bar{y} της μεταβλητής $y = ax + \beta$ ($a, \beta \in \mathbb{R}$) είναι $\bar{y} = a\bar{x} + \beta$.
2. Από τους 10 παίκτες μιας ομάδας μπάσκετ οι 8 είναι Έλληνες με μέση τιμή υψών 201 cm. Οι 2 ξένοι έχουν μέσο ύψος 208 cm.
 - α) ποιο το μέσο ύψος της ομάδας;
 - β) Στη μέση της αγωνιστικής περιόδου ο ένας ξένος που είχε ύψος 210 cm αντικαταστήθηκε με άλλον ύψους 212 cm. Ποιο το μέσο ύψος μετά την αλλαγή; Αν ο προπονητής ήθελε το μέσο ύψος της ομάδας στα 203 cm τότε ποιο ύψος έπρεπε να έχει ο καινούριος ξένος.
3. Σε 20 παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής x βρήκαμε μέση τιμή $\bar{x} = 60$. Διαπιστώθηκε όμως στο τέλος ότι οι 10 παρατηρήσεις από αυτές είχαν εσφαλμένα υπερεκτιμηθεί κατά 5 μονάδες κάθε μία ενώ 9 από τις υπόλοιπες είχαν υποεκτιμηθεί κατά 10 μονάδες η κάθε μία. Να βρεθεί ο σωστός μέσος \bar{y} των παρατηρήσεων.
4. Σε κατανομή που έπρεπε να έχει 50 παρατηρήσεις, διαπιστώθηκε ότι από λάθος καταχωρίστηκε και πεντηκοστή πρώτη τιμή 60. Αν η λαθεμένη μέση τιμή που προέκυψε είναι 20, να βρείτε τη σωστή μέση τιμή της κατανομής.
5.
 - i. Το εργατικό δυναμικό μιας βιομηχανίας ανέρχεται σε 90 άτομα με μέσο μισθό 700€ μηνιαίως. Αν οι προϊστάμενοι και το εξειδικευμένο προσωπικό είναι συνολικά 30 άτομα και λαμβάνουν μέσο μισθό 1000€ ποιος είναι ο μέσος μισθός των ανειδίκευτων εργαζόμενων;
 - ii. Αν προσληφθούν 10 ακόμα άτομα, τα 4 με μέσο μισθό 600€ και τα υπόλοιπα με 700€, εξετάστε πως θα διαμορφωθεί η νέα μέση τιμή του μισθού όλων των εργαζομένων της βιομηχανίας αυτής.
6. Ο τρόπος εισαγωγής στα Α.Ε.Ι. μιας χώρας περιλαμβάνει τη γραπτή εξέταση σε 10 μαθήματα. Για να εισαχθεί ένας μαθητής σε μια σχολή χρειάζεται μέσο όρο βαθμολογίας 17. Ένας μαθητής στα πρώτα 7 μαθήματα έχει μέση βαθμολογία 14. Είναι δυνατόν ο μαθητής με κατάλληλες επιδόσεις στα υπόλοιπα μαθήματα να μπει στη σχολή αυτή;
7. Η εθνική ομάδα μπάσκετ που κατέκτησε την πρώτη θέση στο Ευρωπαϊκό πρωτάθλημα είχε στη σύνθεσή της 4 παίκτες που αγωνίζονται στο ελληνικό πρωτάθλημα, οι οποίοι είχαν μέσο όρο ηλικίας 23,5 έτη. Οι υπόλοιποι παίκτες αγωνίζονται σε διάφορες χώρες της Ευρώπης και είχαν μέσο όρο ηλικίας 25 έτη.
 - α) Βρείτε πόσοι παίκτες συμμετείχαν στην Εθνική ομάδα.

β) Αν υποθεθεί ότι στο αμέσως επόμενο ευρωπαϊκό πρωτάθλημα, που θα γίνει σε 2 χρόνια, η Εθνική θα μετέχει με τους ίδιους παίκτες, με εξαίρεση έναν παίκτη ηλικίας τότε 30 ετών που αποσύρεται και ο οποίος αντικαθίσταται από άλλο παίκτη ηλικίας τότε 20 ετών, να βρεθεί η νέα μέση ηλικία της ομάδας. (Δίνεται ότι ο μέσος όρος της ηλικίας όλων των παικτών είναι 24,5 έτη)

8. Να βρεθεί η μέση τιμή των αριθμών 2, 6, 10, 14, ..., 398.

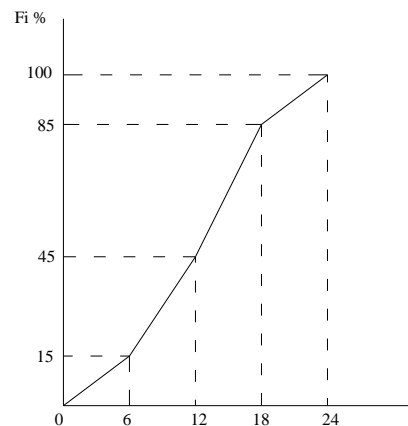
9. α) Η μέση τιμή των βαθμών στα Μαθηματικά του α' τετραμήνου 50 μαθητών της Γ' Λυκείου είναι 15, ενώ η μέση τιμή των 20 πρώτων είναι 18. Να βρεθεί η μέση τιμή των υπόλοιπων.

β) Στο β' τετράμηνο οι μισοί πήραν μια μονάδα λιγότερο, οι 15 πήραν 2 μονάδες περισσότερο και οι υπόλοιποι 10, πήραν 3 μονάδες περισσότερο. Να βρεθεί η μέση τιμή του β' τετραμήνου.

10. Ρωτήσαμε 120 άτομα ποια είναι η ηλικία τους. Είκοσι από αυτούς δήλωσαν ηλικία κατά ένα χρόνο μικρότερη της πραγματικής, τριάντα κατά δύο χρόνια μεγαλύτερη της πραγματικής, δύο κατά 5 χρόνια μικρότερη της πραγματικής και οι υπόλοιποι δήλωσαν την πραγματική τους ηλικία. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει την πραγματική μέση τιμή των ηλικιών με τη μέση τιμή που προέκυψε από τις απαντήσεις των ατόμων.

11. Ο μέσος όρος στα μαθηματικά των μαθητών μιας τάξης ενός Λυκείου είναι 14. Στην τάξη αυτή ήρθαν από άλλο σχολείο δύο μαθητές με βαθμούς : ο ένας 19 και ο άλλος 13. Ο νέος μέσος όρος είναι ίσος με 14,2. Να βρεθεί ο αρχικός αριθμός των μαθητών της τάξης.

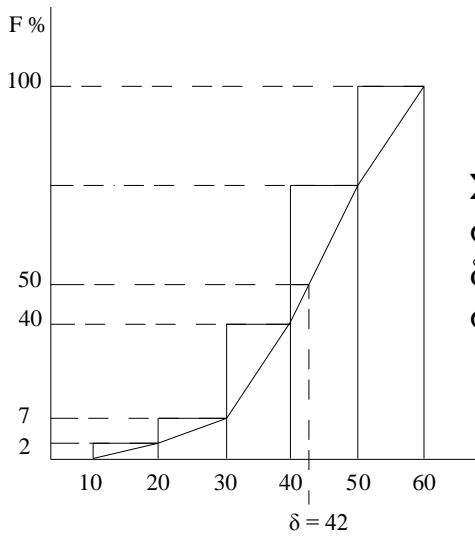
12. Δίνεται το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων ενός δείγματος. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.



13. Να υπολογιστεί η διάμεσος ενός δείγματος ομαδοποιημένων παρατηρήσεων αν γνωρίζουμε ότι :

ΚΛΑΣΕΙΣ	[2, 6)	[6, 10)	[10, 14)	[14, 18)
f_i %	10	25	40	25

14.



Στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, η διάμεσος είναι $\delta = 42$. Να υπολογίσετε την αθροιστική σχετική συχνότητα της κλάσης $[40, 50)$.

15.

x_i	v_i
6	2
8	3
10	4
12	;
14	2
16	3

Η μεταβλητή X παίρνει τις τιμές που φαίνονται στον πίνακα με τις αντίστοιχες συχνότητες. Η τέταρτη συχνότητα είναι άγνωστη. Μπορείτε να την υπολογίσετε, αν
 α) η μέση τιμή είναι 11
 β) η διάμεσος είναι 11

16.

Αριθμ. Δωματ. x_i	v_i
1	16
2	-
3	-
4	26
Άθροισμα	100

Τα νοικοκυριά των δημοσίων υπαλλήλων μιας πόλης έχουν κατά μέσον όρο 2,63 δωμάτια. Από τον πίνακα συχνοτήτων όμως της μεταβλητής $x =$ αριθμός δωματίων έχουν σβηστεί οι συχνότητες των τιμών $x = 2$ και $x = 3$. Να υπολογιστεί ο διάμεσος.

17. Τα νούμερα παπουτσιών 8 στρατιωτών είναι :

40 44 42 41 42 44 42 44

Να βρείτε : α) τη διακύμανση β) την τυπική απόκλιση
 γ) το συντελεστή μεταβλητότητας .

18. Ποια είναι η διακύμανση των παρατηρήσεων $x, x+2, x+7$; Ποια η τυπική απόκλιση ;

19. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός λ και 8 διαδοχικοί περιττοί ακέραιοι αριθμοί. Αν $\lambda \in (50, 80)$ και οι παραπάνω αριθμοί έχουν μέσοι τιμή 64, να βρεθεί ο διάμεσος και η τυπική απόκλιση .

20.

Λάθη x_i	Μαθητής v_i	$v_i x_i$
1	α	α
2	β	2β
3	5	15
Άθροισμα	50	$15+\alpha+2\beta$

Ο πίνακας παρουσιάζει τα ορθογραφικά λάθη 50 μαθητών της τελευταίας τάξης ενός λυκείου. Τα στοιχεία που λείπουν έχουν χαθεί. Αν ο μέσος αριθμητικός της παραπάνω κατανομής είναι $\bar{x} = 1,4$ να υπολογιστεί η διακύμανση .

21.

Κλάσεις	v_i	x_i	$v_i x_i$
[0, 10)	4	5	20
[10, 20)	α	15	$15 \cdot \alpha$
[20, 30)	β	25	$25 \cdot \beta$
[30, 40)	1	35	35
	10		$55+15\alpha+25\beta$

Αν στην παρακάτω κατανομή ο μέσος αριθμητικός είναι 15, να υπολογισθούν οι συχνότητες που έχουν χαθεί και η τυπική απόκλιση .

22. Σε μαθηματικούς αγώνες σφαιροβολίας, η χαμηλότερη επίδοση ήταν 3m και η ψηλότερη 11m. Ομαδοποιήσαμε τα αποτελέσματα σε 4 ισοπλατείς κλάσεις και προέκυψε ότι : Το 12% των μαθητών έριξε μέχρι 5m και το 80% έριξε μέχρι 9m. Αν οι μισές ρίψεις ξεπέρασαν τα 7,5m, να βρεθεί η τυπική απόκλιση.

23. Δίνονται οι μεταβλητές x και y με μέσες τιμές \bar{x} , \bar{y} και τυπικές αποκλίσεις S_x και S_y αντίστοιχα. α) Αν $y = ax + \beta \bar{x}$ να αποδειχθεί ότι $S_y = |\alpha| \cdot S_x$,
β) Αν $S_y = S_x$ και υπάρχουν δύο παρατηρήσεις της μεταβλητής x διαφορετικές, να προσδιοριστούν οι α , $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\bar{x} = 2$ και $\bar{y} = 4$.

24. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση 7 αριθμών είναι $\bar{x} = 20$ και $s = 10$

αντίστοιχα. Αν για τις πρώτες 6 τιμές ισχύει $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 600$, να βρεθεί η έβδομη τιμή .

25. Μια σοκολατοβιομηχανία παρασκευάζει πλάκες σοκολάτας με μέση τιμή βάρους 200 g. Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = 25\%$ και ότι ισχύει $\sum x_i^2 \cdot v_i = 1275000$. Να βρείτε το μέγεθος n του δείγματος .

26. Αν \bar{x} η μέση τιμή της μεταβλητής x και $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{N}^*$ μια σειρά παρατηρήσεων με συχνότητα 1, να δείξετε ότι: $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \bar{x}^2$

27. Θεωρούμε δείγμα μέγεθος 10. Αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων x_i είναι 8 και $\sum_{i=1}^{10} (x_i)^2 = 1000$, να βρείτε : α) τη διακύμανση β) την τυπική απόκλιση.

28. Αν S_x^2 είναι η διακύμανση μιας μεταβλητής x , να δείξετε ότι : $S_x^2 < \overline{x^2}$.

29. Ναδειχτεί ότι η διακύμανση $S^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k v_i (x_i - \bar{x})^2 \right]$ ενός δείγματος μπορεί

να γραφτεί και με τη μορφή: $S^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k v_i (x_i - \bar{x}) x_i \right]$.

30. Θεωρούμε τη μεταβλητή x με σύνολο τιμών $A = \{0, 1\}$. Αν S^2 είναι η διακύμανση της x και \bar{x} η μέση τιμή της, ναδειχθεί ότι: $S^2 = \bar{x} \cdot (1 - \bar{x})$.

31. Ναδειχθεί ότι δεν είναι δυνατόν η διακύμανση των παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_v να συμπίπτει αριθμητικά με την μέση τιμή \bar{x} .

32. Αν t_1, t_2, \dots, t_v οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής x ναδειχθεί ότι

το \min της παράστασης $\sum_{i=1}^v (t_i - \mu)^2$ είναι ίσο με $v \cdot S^2$, όπου S^2 η διακύμανση της x .

33. Μια ποσοτική μεταβλητή x όταν παίρνει τις τιμές t_1, t_2, \dots, t_8 έχει μέση τιμή $\bar{x}_1 = 8$ και τυπική απόκλιση $S_1 = 6$. Η ίδια μεταβλητή παίρνει τιμές r_1, r_2, \dots, r_{12} έχει $\bar{x}_2 = 3$ και τυπική απόκλιση $S_2 = 4$. Ποια η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της μεταβλητής όταν παίρνει τιμές $t_1, t_2, \dots, t_8, r_1, r_2, \dots, r_{12}$.

34. Έστω ότι x, y, z ποσοτικές μεταβλητές ενός δείγματος μεγέθους $3v$ με v τιμές η κάθε μία. Αν $y = (x-1)^2$ και $z = (x-2)^2$ με $\bar{y} = 10$ και $\bar{z} = 6$ να υπολογισθεί η μέση τιμή \bar{x} και η διακύμανση S_x^2 της μεταβλητής X .

35. Αν οι παρατηρήσεις x_1, x_2, \dots, x_v έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 10$ και διασπορά $S_x^2 = 3$ να βρείτε τη μέση τιμή \bar{y} των παρατηρήσεων y_i όπου $y_i = 3x_i^2 - 5x_i + 4$ για $i = 1, 2, \dots, v$.

36. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^v (x_i - \alpha)^2$.

37. Αν οι μεταβλητές x, ψ συνδέονται με τη σχέση $\psi = 2x^2 - 3x + 4$ και $\bar{\psi} = 21$, $S_x = 3$ να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} .

38. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής x είναι \bar{x} και S_x . Αν για τη μεταβλητή Ψ ισχύει $2X + S_x \Psi = 2\bar{x}$ να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανση της Ψ αν $S_x \neq 0$.

39. Στον παρακάτω πίνακα έχουν παραλειφθεί δύο συχνότητες. Να βρεθούν οι συχνότητες αυτές, αν γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = \frac{7}{3}$

και η διακύμανση τους είναι $s^2 = \frac{14}{9}$.

x_i	1	2	3	4	5
v_i	5	4			1

40. Πριν από 4 χρόνια η μέση «ηλικία» των 20 αεροπλάνων που διαθέτει μια εταιρία ήταν 18 χρόνια και η τυπική απόκλιση 3 χρόνια. Αν γνωρίζουμε ότι κατά το τελευταίο χρόνο 2 αεροπλάνα με ηλικίες 20, 25 χρόνων αντικαταστάθηκαν από 2 νέα ηλικίας 7, 15 χρόνων. Να υπολογίσετε :

- α) τη τωρινή μέση ηλικία του «στόλου» ,
β) την τυπική απόκλιση των ηλικιών .

41. Η μέση τιμή και η διακύμανση S^2 ενός δείγματος 6 διαφορετικών παρατηρήσεων υπολογίστηκαν και έχουν τις τιμές $\bar{x} = 20$, $S^2 = 160$.

Διαπιστώθηκε αργότερα πως η μέτρηση 18 από λάθος καταγράφηκε 24 .

- α) Βρείτε την πραγματική μέση τιμή και διακύμανση του δείγματος .
β) Είναι το δείγμα ομογενές ;

42. Αν 5, 6, 7, 8, 6, 4, 9 είναι οι βαθμοί του φοιτητή Ιατρικής Τρελλόπουλου Ιωάννη του Α' έτους, να υπολογιστεί ο συντελεστής μεταβλητότητας .

43. Σε δύο μετεωρολογικούς σταθμούς Α και Β έχουμε σε ένα 24ωρο τις εξής μετρήσεις θερμοκρασίας :

Σταθμός Α: 12 16 19 25 27 22 18 17 14

Σταθμός Β: -2 0 3 5 5 6 2 1 -1

Χρησιμοποιήστε κατάλληλο μέτρο διασποράς για να συγκρίνετε τις παραπάνω μετρήσεις .

44. Η μέση τιμή της βαθμολογίας των μαθητών της Γ' τάξης ενός λυκείου είναι 15. Αν ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = 20\%$, να βρείτε την τυπική απόκλιση. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $\sum x_i^2 v_i = 21.060$, να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές της τάξης .

45. Μια εταιρία με 100 υπαλλήλους έχει χωρίσει το μισθολόγιό της σε δύο κατηγορίες : στην Α κατηγορία υψηλόμισθων υπαλλήλων και Β κατηγορία χαμηλόμισθων υπαλλήλων. Οι εβδομαδιαίοι μισθοί των δύο κατηγοριών καθώς και το πλήθος των υπαλλήλων, παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες :

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α

Μισθός σε €	600	550	400	500	450
Πλήθος	8	9	12	10	11

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β

Μισθός σε €	350	300	150	250	200
Πλήθος	8	9	12	10	11

Α. Να βρεθεί ο μέσος εβδομαδιαίος μισθός κάθε κατηγορίας .

Β. Να υπολογιστεί ο συντελεστής μεταβλητότητας των μισθών και στις δύο κατηγορίες, αν γνωρίζουμε ότι η τυπική απόκλιση είναι 70 € και στις δύο κατηγορίες .

Γ. Σε ποια από τις δύο κατηγορίες η μισθοδοσία παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας .

46. Στις τελευταίες εξετάσεις ενός Πανεπιστημιακού τμήματος στο μάθημα της Στατιστικής έλαβαν μέρος 40 φοιτητές. Οι 12 από αυτούς βαθμολογήθηκαν με βαθμό κάτω του 4 και οι 4 με βαθμό κάτω του 2. Το 40% των φοιτητών, βαθμολογήθηκε με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από 4 αλλά μικρότερο του 6. Η γωνία του κυκλικού τομέα, του αντίστοιχου κυκλικού διαγράμματος της βαθμολογίας των φοιτητών, γι' αυτούς που βαθμολογήθηκαν με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 8 είναι 36° . Αν η κλίμακα βαθμολογίας είναι από μηδέν έως δέκα (0 – 10) και η βάση το πέντε

α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων της βαθμολογίας των φοιτητών .

β) Να βρείτε πόσοι φοιτητές πέρασαν το μάθημα .

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διακύμανση, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβλητότητας της βαθμολογίας των φοιτητών .

Είναι το δείγμα ομογενές ;

47. Αν για τη μέση τιμή \bar{x} και τη διακύμανση S^2 μιας μεταβλητής X_i ($X_i > 0$) ισχύει : $100S^2 = 4\bar{x}^2$ ζητούνται :

α. Ο συντελεστής μεταβολής

β. Αν κάθε τιμή της μεταβλητής X_i αυξηθεί κατά 10%, ποια θα είναι η νέα τιμή του συντελεστή μεταβολής;

γ. Αν κάθε τιμή της μεταβλητής αυξηθεί κατά μια σταθερά C ($C > 0$), να βρεθεί η σχέση που συνδέει τη μέση τιμή \bar{x} με τη σταθερά C , ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

48. Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_n και έχει μέση τιμή $\bar{x} = 2$ και ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = 15\%$. Να υπολογίσεις τη μέση τιμή των τιμών της μεταβλητής Ψ όπου $\Psi = X^2$ δηλαδή $y_i = x_i^2$ με $I = 1, 2, \dots, n$.

49. Ο αριθμός των υποψηφίων δημάρχων στις τελευταίες δημοτικές εκλογές σε ένα δείγμα n δήμων μιας περιφέρειας της Ελλάδος δίνονται στον πίνακα :

Υποψήφιοι δήμαρχοι x_i	1	2	3	4	5
Πλήθος δήμων v_i	10	v_2	v_3	8	10

Αν ισχύει $\bar{x} = 3$ και $CV = \frac{40\sqrt{15}}{3}\%$ τότε, να υπολογίσεις :

α) τις συχνότητες v_2, v_3 και το μέγεθος n του δείγματος

β) τη μικρότερη τιμή του θετικού αριθμού α ώστε το δείγμα $y_i = x_i + \alpha$, $I = 1, 2, \dots, n$ να είναι ομοιογενές (δηλαδή να βρεθεί η τιμή του α ώστε το δείγμα να είναι «οριακά» ομοιογενές).

50. Σύμφωνα με το νέο ασφαλιστικό νόμο, στους εργαζόμενους από 35 ετών και άνω, επιβάλλεται ένας νέος φόρος 3% για την ενίσχυση των ασφαλιστικών ταμείων. Μετά από αντιδράσεις των εργαζομένων, αποφασίστηκε να δοθεί στον καθένα αύξηση 30 ευρώ.

α) Ποιος είναι ο μικρότερος μισθός, που πρέπει να έχει ένας εργαζόμενος, ώστε να ζημιωθεί από την παραπάνω ρύθμιση.

β) Αν ο μέσος μισθός των εργαζομένων μιας επιχείρησης ήταν $\bar{x} = 800\text{€}$ και το δείγμα ήταν «οριακά» ομοιογενές, τότε να υπολογίσετε το μέσο μισθό και την τυπική απόκλιση μετά την εφαρμογή του νέου νόμου.

51. Σε ένα δείγμα $V = 20$, η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 25$ και ισχύει $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 12.820$.

Να βρεθεί πόσο τουλάχιστον θα πρέπει να αυξηθεί η κάθε παρατήρηση, ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

52. Δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X : 2 3 3 5 7 3 2 6 9 4.

A. Να υπολογίσετε :

α) τη μέση τιμή και τη διάμεσο,

β) το εύρος,

γ) τη διασπορά και την τυπική απόκλιση,

δ) το συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Αν όχι, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της σταθεράς $c \in \mathbb{Z}$ κατά την οποία πρέπει να αυξηθεί κάθε παρατήρηση έτσι ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

B. Αν οι παραπάνω τιμές του δείγματος πολλαπλασιαστούν αρχικά με -2 και στη συνέχεια αυξηθούν κατά 3 , να βρεθούν οι νέες τιμές της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και του συντελεστή μεταβολής.

53. Δίνονται οι παρατηρήσεις x_i με $i = 1, 2, 3, \dots, 40$. 10 από αυτές μειώνονται κατά 4 και 6 από αυτές αυξάνονται κατά 8 και προκύπτουν έτσι οι παρατηρήσεις y_i με $i = 1, 2, 3, \dots, 40$.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων y_i αν $\bar{x} = 25$.

β) Να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση των y_i αν $\sum_{i=1}^{40} y_i^2 = 36.400$.

γ) Να εξετάσετε αν το δείγμα των y_i είναι ομοιογενές.

54. Δίνεται το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων που αναφέρεται στο βάρος των ατόμων που διαμένουν σε μια πολυκατοικία.

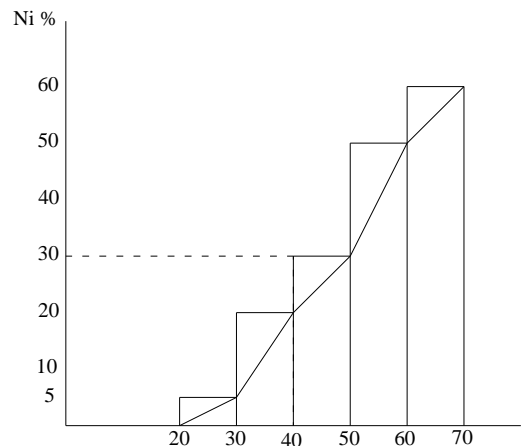
Ζητούνται :

α) Η μέση τιμή.

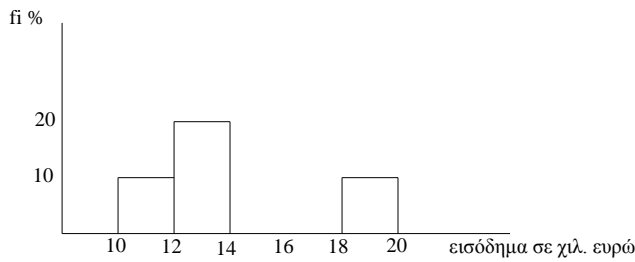
β) Η διάμεσος

γ) Ο συντελεστής μεταβολής

δ) Ο αριθμός των ατόμων που έχουν βάρος : i. το πολύ 45 κιλά, ii. τουλάχιστον 55 κιλά.



55. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων f_i % του ετήσιου εισοδήματος σε χιλιάδες ευρώ, των εργαζομένων σε επιχείρηση.



Από το ιστόγραμμα λείπουν τα ορθογώνια που αντιστοιχούν σε δύο κλάσεις. Αν η μέση τιμή του ετήσιου εισοδήματος είναι 15200 ευρώ τότε:

α. Να βρείτε τις συχνότητες f_3, f_4 που λείπουν

β. Η διοίκηση της επιχείρησης αποφάσισε την χορήγηση επιδόματος θέρμανσης σε όσους από τους εργαζόμενους έχουν έσοδα ετήσια μικρότερα από 16000 ευρώ. Βρείτε το ποσοστό των εργαζομένων που δικαιούνται το επίδομα.

γ. Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι 40 τότε να βρείτε τον αριθμό των οικογενειών που δικαιούνται το επίδομα του προηγούμενου ερωτήματος.

δ. Αν η διοίκηση της εταιρείας αποφασίσει να αυξήσει τους μισθούς όλων των εργαζομένων κατά 10% από την επόμενη χρονιά. Να βρείτε ποια θα είναι η μέση τιμή του ετήσιου εισοδήματος, μετά την αύξηση.

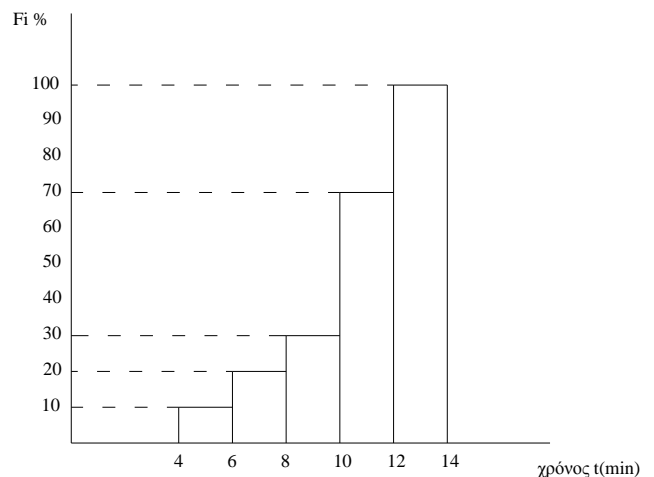
56.

Μισθός (εκατοντάδες €)	Υπάλληλοι
[2, 4)	10
[4, 6)	
[6, 8)	
[8, 10)	15
[10, 12]	5
Σύνολο	80

Δίνεται η παρακάτω κατανομή της μισθοδοσίας (σε εκατοντάδες ευρώ) των 80 υπαλλήλων μιας επιχείρησης. Αν είναι γνωστό ότι η διάμεσος είναι 640€, να βρεθούν οι συχνότητες v_2 και v_3 .

57. Δίνεται το διπλανό ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων, το οποίο περιγράφει το χρόνο (σε min) που χρειάζονται οι οδηγοί να διανύσουν μια συγκεκριμένη απόσταση 8 Km.

i. Να βρεθεί η μέση τιμή της ταχύτητας των οδηγών.



- ii. Να βρεθεί η ταχύτητα που πρέπει να έχει ένας οδηγός, ώστε να περιλαμβάνει στο 15% των πιο «γρήγορων».
- iii. Αν το όριο ταχύτητας για τη συγκεκριμένη διαδρομή είναι 50 Km/h, να βρεθεί η πιθανότητα να δεχθεί κλήση ένας οδηγός.

58. Η βαθμολογία στα γραπτά 50 μαθητών κυμάνθηκε από 10 έως 20. Χωρίζοντας τους 50 βαθμούς των αντίστοιχων γραπτών σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους και κατασκευάζοντας ιστόγραμμα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων καθώς και κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, παρατηρήσαμε ότι :

- i. στο ιστόγραμμα συχνοτήτων, το εμβαδόν του ορθογωνίου της κλάσης 10-12 ισούται με 5.
- ii. στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων (επί τοις εκατό), το ύψος του ορθογωνίου της κλάσης 16-18 είναι 20.
- iii. στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, το τόξο που αντιστοιχεί στην κλάση 14-16 είναι 144° .

Αν οι μαθητές που το γραπτό τους βαθμολογήθηκε με 12-14 είναι τετραπλάσιοι από τους μαθητές που βαθμολογήθηκαν με 18-20, να δείξετε ότι :

- α. Το πλάτος της κλάσης είναι 2.
- β. Οι μαθητές με βαθμό 18-20 είναι 3.
- γ. Να γίνει πίνακας κατανομής συχνοτήτων και να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος από τα ανάλογα ιστογράμματα.

59. Ένας πλανόδιος πωλητής πούλησε σε μια μέρα 100 καρπούζια. Το μέσο βάρος των καρπουζιών ήταν 7kg με τυπική απόκλιση $s = 1\text{kg}$. Ο πωλητής γνώριζε ότι η ζυγαριά του έδειχνε 2kg περισσότερα σε κάθε μέτρηση.

- i) Να βρεθεί η πραγματική μέση τιμή και τυπική απόκλιση του βάρους των καρπουζιών.
- ii) Αν $x_i, i = 1, 2, \dots, 100$ τα πραγματικά βάρη των καρπουζιών, να αποδειχθεί ότι: $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 = 2600$.

60. Οι σημερινές ηλικίες μιας ομάδας ανθρώπων έχουν συντελεστή μεταβολής $CV_1 = 8\%$ ενώ πριν από 15 χρόνια ο συντελεστής μεταβολής των ηλικιών τους ήταν $CV_2 = 20\%$.

- i) Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της σημερινής τους ηλικίας.
- ii) Πριν πόσα χρόνια από σήμερα οι ηλικίες των ανθρώπων αυτής της ομάδας είχαν για πρώτη φορά ομοιογένεια.
- iii) Αν το άθροισμα των τετραγώνων των σημερινών ηλικιών είναι 25160, να βρεθεί πόσοι άνθρωποι απαρτίζουν αυτοί την ομάδα.

Σ. 4

ΚΑΜΠΥΛΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

1. Μία εταιρία συσκευάζει κονσέρβες με μέσο βάρος 500g. Η διακύμανση είναι $s^2=9$. Αν έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρεθεί το ποσοστό των κονσερβών που ζυγίζουν:

- α) λιγότερο από 494 g β) 497g ως 503 g.
γ) 500-506 g δ) πάνω από 503 g

2. Δείγμα μαθητών στο ερώτημα πόσες φορές το χρόνο πηγαίνει στο γήπεδο έδωσε απαντήσεις η μέση τιμή των οποίων είναι 8 με τυπική απόκλιση 2. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών που πηγαίνουν:

- α) κάτω από 6 φορές β) πάνω από 12 φορές
γ) το πολύ 8 φορές δ) από 6 έως 12 φορές

3. Σε μια κανονική κατανομή που αναφέρεται στο χρόνο(λεπτά) που χρειάζονται οι μαθητές να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο, υπολογίστηκε ότι ο συντελεστής μεταβολής είναι 0,20 και το 16% περίπου των μαθητών χρειάζεται το πολύ 8 λεπτά. Ζητούνται:

- α) Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της κατανομής.
β) Το εύρος (κατά προσέγγιση).
γ) Το ποσοστό των μαθητών που χρειάζεται 8-14 λεπτά.

4. Η μέση τιμή δείγματος, με κανονική καμπύλη συχνοτήτων, είναι 3 και το γινόμενο διακύμανσης μέσης τιμής ισούται με 432. Να βρείτε το ποσοστό των τιμών του δείγματος στο διάστημα (-9, 27) .

5. Σε μια εταιρία οι εβδομαδιαίοι μισθοί των υπαλλήλων ακολουθούν την κανονική κατανομή και το 16% περίπου των υπαλλήλων έχει εβδομαδιαίο μισθό μεγαλύτερο των 500€, ενώ το 2,5% περίπου έχει εβδομαδιαίο μισθό μικρότερο των 200€.

A. Να βρείτε το μέσο εβδομαδιαίο μισθό των υπαλλήλων και την τυπική απόκλιση του μισθού τους.

B. Αν 34 υπάλληλοι έχουν εβδομαδιαίο μισθό που κυμαίνεται από 300 έως 500€ να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των υπαλλήλων της εταιρίας.

Γ. Πόσοι υπάλληλοι παίρνουν εβδομαδιαίο μισθό μικρότερο των 300€.

Δ. Να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής της κατανομής.

E. Αν η εταιρία κάνει αύξηση του εβδομαδιαίου μισθού των υπαλλήλων κατά 20% τότε θα υπάρξει μεταβολή του συντελεστή μεταβολής της κατανομής;

6. Οι μισθοί των υπαλλήλων σε € μιας εταιρίας ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή και το 49,85% των μισθών βρίσκονται στο διάστημα (1850,2000) τότε:
- A. Να βρεθούν για τους μισθούς η μέση τιμή, η διάμεσος, η τυπική απόκλιση, ο συντελεστής μεταβολής και το εύρος της.
 - B. Να βρεθεί το ποσοστό των μισθών που είναι πάνω από 2000€.

ΜΕΙΚΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ
--

1. Έστω x_1, x_2, \dots, x_k , οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n . Αν για τις συχνότητες v_i και τις αθροιστικές συχνότητες F_i ισχύουν:

$$v_i = \lambda + 2i, \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } F_i = \frac{2i^2 + 10i}{100}, i = 2, 3, \dots, k \text{ τότε:}$$

- i) Να δείξετε ότι $f_i = \frac{8 + 4i}{100}$
- ii) Να δείξετε ότι $k = 5$.
- iii) Να βρείτε την τιμή του λ συναρτήσει του n .
- iv) $N_i = i^2 + i \left(\frac{1}{5}n - 5 \right)$

2. Έστω x_1, x_2, \dots, x_{100} οι τιμές μιας μεταβλητής X με μέση τιμή \bar{x} . Σε κάποιες από τις τιμές x_i προσθέτουμε τον αριθμό 7 και στις υπόλοιπες αφαιρούμε το 3. Η μέση τιμή του νέου δείγματος είναι μεγαλύτερη της \bar{x} κατά 4 μονάδες. Να βρείτε σε πόσες τιμές της μεταβλητής X προσθέσαμε το 7.

3. Το διπλανό σχήμα παριστάνει το πολύγωνο συχνοτήτων των παρατηρήσεων x_i από έναν πληθυσμό μεγέθους $n = 100$.

Αν ισχύει $2v_2 = v_1 + v_3$,

- i) Να βρείτε τη διαφορά $N_3 - v_2$
- ii) Αν οι αριθμοί v_1, v_3 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (v_1 + v_3)x + 800 = 0$$

να βρείτε τις συχνότητες όλων των παρατηρήσεων και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

4. Στο διπλανό πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων δίνονται οι ημέρες διακοπών των υπαλλήλων μιας εταιρίας κατά το μήνα Ιούνιο. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους. Να βρεθεί:

- i) Το πλήθος των εργαζομένων.
- ii) Οι συχνότητες των κλάσεων.
- iii) Η τιμή x_k της μεταβλητής που έχει αθροιστική συχνότητα $N_k = 15$.

5. Ένας βιομήχανος θέλει να κάνει αύξηση στους μισθούς των εργαζομένων του. Του έχουν προταθεί δύο τρόποι για να δώσει την αύξηση. Να δώσει σε καθένα 42€ ή 6% του μισθού του. Ποιος πρέπει να είναι ο μέσος μισθός των εργαζομένων, ώστε να «συμφέρει» το βιομήχανο η αύξηση του 6%.

6. Αν σε ένα δείγμα μεγέθους n για τις μεταβλητές x, y, z ισχύουν οι σχέσεις:

$$z = 3x - 12 \quad y = 2 - x$$

και οι μεταβλητές y, z έχουν τον ίδιο CV, να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} .

7. Ένα δείγμα n παρατηρήσεων με θετικές τιμές έχει μέση τιμή \bar{x} και διακύμανση s_x^2 . Αν ισχύει $100s_x^2 = 16\bar{x}^2$:

i) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

ii) Αυξάνουμε κάθε μια από τις παρατηρήσεις x_i κατά σταθερή ποσότητα $c > 0$. Να βρείτε τη ελάχιστη τιμή της c για την οποία το δείγμα γίνεται ομοιογενές.

iii) Αν η μέση τιμή των τετραγώνων των παρατηρήσεων της αρχικής μεταβλητής x είναι 116, να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής x .

8. Έστω μια μεταβλητή X που παίρνει τιμές x_1, x_2, \dots, x_n . Αν η μεταβλητή X έχει μέση τιμή \bar{x} διάφορη του μηδενός και συντελεστή μεταβολής CV τότε:

i) Να δείξετε ότι $1 + CV^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n\bar{x}^2}$

ii) Έστω $x_1 = 2, x_2, x_3 = 1, x_4, x_5 = 10$ οι πέντε τιμές μιας μεταβλητής X . Να

υπολογίσετε τις τιμές που λείπουν, αν γνωρίζετε ότι $\bar{x} = 4, CV = \frac{\sqrt{10}}{4}$ και ισχύει

$$x_3 < x_4.$$

9. i) Δίνεται δείγμα τιμών μεγέθους n , με μέση τιμή \bar{x} και τυπική απόκλιση s .

Να αποδειχθεί ότι $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n(s^2 + \bar{x}^2)$

ii) Από τους 20 εργάτες μιας βιοτεχνίας οι 15 έχουν μέσο ημερομίσθιο $\bar{x}_1 = 30\text{€}$ με τυπική απόκλιση $s_1 = 2$ και οι υπόλοιποι 5 έχουν μέσο ημερομίσθιο $\bar{x}_2 = 40$ με τυπική απόκλιση $s_2 = 3$. Να υπολογιστεί το μέσο ημερομίσθιο, καθώς και η τυπική απόκλιση όλων των εργατών.

10. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν το 16% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 12 και το 2,5% μεγαλύτερες του 21 τότε :

i) Να βρεθεί το \bar{x} και το s .

ii) Το εύρος R και ο συντελεστής μεταβολής CV.

iii) Ποιο ποσοστό παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα από 9 έως 21;

iv) Αν το μέγεθος του δείγματος είναι 11, να υπολογιστεί το $\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i$.

11. Στα δύο τμήματα T_1 και T_2 του μεταπτυχιακού Στατιστικής, η γραπτή μέση βαθμολογία των εξετάσεων του 1^{ου} εξαμήνου στο μάθημα της Στατιστικής ήταν $\bar{x} = 6$ και η τυπική απόκλιση $s = 1$. Στο 2^ο εξάμηνο όλοι οι φοιτητές του

τμήματος T_1 αύξησαν τη γραπτή βαθμολογία τους στο ίδιο μάθημα κατά 1 μονάδα. Επίσης, όλοι οι φοιτητές του τμήματος T_2 αύξησαν τη γραπτή βαθμολογία τους στο ίδιο μάθημα κατά 15%.

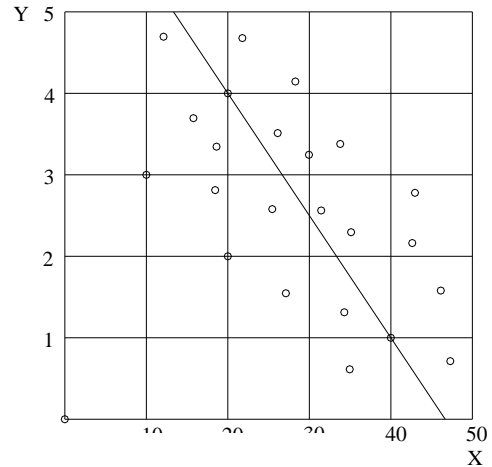
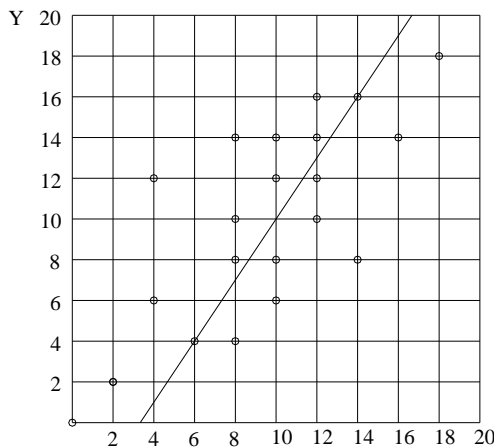
- i) Να βρεθούν οι νέες μέσες τιμές και οι νέες τυπικές αποκλίσεις του κάθε τμήματος.
- ii) Ποιου τμήματος η βαθμολογία παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια μετά τις αυξήσεις τις βαθμολογίας που πέτυχαν στις εξετάσεις 2^ο εξαμήνου.
- iii) Να βρεθεί η μικρότερη τιμή της θετικής ακέραιας σταθεράς C που πρέπει να προστεθεί στις γραπτές βαθμολογίες των φοιτητών του τμήματος T_1 μετά τη βαθμολογία του 2^ο εξαμήνου έτσι ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.
- iv) Αν οι βαθμολογίες του τμήματος T_1 αποτελούν περίπου κανονική κατανομή να βρεθεί το ποσοστό των φοιτητών που έγραψε από 6 έως 9 στις εξετάσεις του 1^ο και 2^ο εξαμήνου.

12. Η κατανομή του χρόνου x σε ώρες που χρειάζεται να κάνει η γραμμή INTERCITY μεταξύ των σταθμών Αθήνας και Θεσσαλονίκης είναι κανονική. Αν για 100 διαδρομές μεταξύ αυτών των σταθμών έχουμε $\sum t_i = 800$ και $\sum t_i^2 = 6464$ τότε:

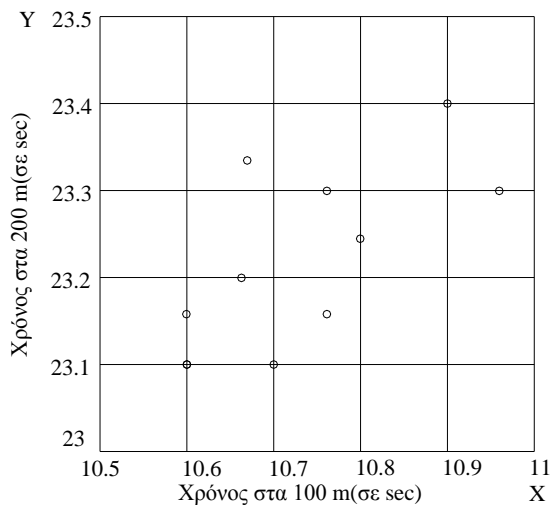
- A. i) Να βρείτε το μέσο χρόνο που χρειάζεται η αμαξοστοιχία για να διανύσει την παραπάνω απόσταση.
- ii) Βρείτε την τυπική απόκλιση των χρόνων της παραπάνω διαδρομής
- iii) Βρείτε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
- B. i) Να βρείτε το πλήθος των διαδρομών που χρειάστηκε τουλάχιστον 8 ώρες η αμαξοστοιχία να διανύσει την απόσταση Αθήνα – Θεσσαλονίκη.
- ii) Να βρείτε το ποσοστό των διαδρομών που χρειάστηκε από 7,2 έως 9,6 ώρες η αμαξοστοιχία για να διανύσει την απόσταση Αθήνα – Θεσσαλονίκη.
- iii) Βρείτε το πλήθος των διαδρομών με χρόνο το πολύ 7,2 ώρες.
- Γ. Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος της κατανομής.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών γραμμικής παλινδρόμησης που έχουμε φέρει “με το μάτι” στα παρακάτω διαγράμματα



2. ΧΡΟΝΟΙ 10 ΔΡΟΜΕΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΤΑ 100 ΚΑΙ ΣΤΑ 200 ΜΕΤΡΑ



Στο παρακάτω διάγραμμα διασποράς να φέρετε “με το μάτι” την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης και να προσδιορίσετε την εξίσωσή της .

3.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
			100
15			60
	2		
	6	2500	
100	17		

Να συμπληρώσετε τα κενά του παραπλεύρως πίνακα και να προσδιορίσετε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $y = \alpha + \beta x$

4.

x	y
2	3
5	4
7	5
4	2
1	0

Για τα δεδομένα του διπλανού πίνακα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων $y = \alpha + \beta x$.

Μετά να εκτιμήσετε την τιμή του y όταν το x είναι ίσο με : α) 8, β) 0, γ) 6.

5. Να συμπληρώσετε το κενό του διπλανού πίνακα αν είναι

x	2	5	4		10
y	3	7	4	10	15

γνωστό ότι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων της μεταβλητής Y πάνω στη X

είναι : $\alpha = -\frac{43}{51}$, $\beta = \frac{76}{51}$.

6.

x	y
5	4
10	8
15	10
20	20
25	20

Για τα δεδομένα του διπλανού πίνακα να βρείτε :

α) την εξίσωση ευθείας ελαχίστων τετραγώνων της μεταβλητής Y πάνω στη X .

β) την εξίσωση ευθείας ελαχίστων τετραγώνων της μεταβλητής X πάνω στη Y .

γ) Να εκτιμήσετε το x αν είναι γνωστό ότι $y = 15$.

7.

Να προσδιορίσετε τα α ώστε η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων για τα δεδομένα

του πίνακα να είναι η : $y = \frac{18}{5}x + \frac{27}{5}$.

x	Y
1	10
2	12
3	15
4	A
5	24

8.

x	Y
1	1
5	8
2	3
A	6
3	2

Να προσδιορίσετε τις τιμές του α ώστε η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων για τα δεδομένα του πίνακα να έχει συντελεστή

διεύθυνσης $\frac{17}{10}$.

9. Οι μεταβλητές x και y εξαρτώνται η μία από την άλλη και ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$\sum x_i = 50 \quad \sum y_i = 732 \quad \sum x_i^2 = 322 \quad \sum y_i^2 = 67214 \quad \sum x_i y_i = 4640 \quad n = 10.$$

Να υπολογιστεί η ευθεία παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$.

10. Να προσδιορίσετε το α , ώστε η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων για τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα να είναι η $y = 1 + x$.

x	1	2	3	4	5
y	1	4	5	α	6

11. Σε έρευνα, για το πώς μεταβάλλεται το βάρος(y) των παιδιών ηλικίας 17 ετών σε σχέση με το ύψος(x) τους, βρέθηκε ότι :

Αν το ύψος μεταβληθεί κατά μια μονάδα, τότε το βάρος μεταβάλλεται κατά $1,3\text{Kg}$.

Αν η μέση τιμή του ύψους των μαθητών είναι 170 cm και το μέσο βάρος 75 Kg , να εκτιμήσετε το βάρος ενός μαθητή με ύψος 190 cm .

12. Η ευθεία $y = 12 + \beta x$ εκτιμά τους βαθμούς (y) που συγκέντρωνε ομάδα ποδοσφαίρου της Φθιώτιδας, σε σχέση με τα τέρματα (x) που επιτύγχανε, την πενταετία $1995 - 2000$.

Η ευθεία $y = 120 - \beta x$ εκτιμά τους βαθμούς που συγκέντρωνε η ίδια ομάδα σε σχέση με τα τέρματα, την πενταετία $1990 - 1995$.(Το β είναι το ίδιο και στις δύο πενταετίες) .

Να εκτιμήσετε πόσους βαθμούς θα συγκεντρώσει η ομάδα στο τοπικό πρωτάθλημα της χρονιάς $2000 - 2001$, αν πετύχει 60 τέρματα. Είναι γνωστό ότι το 1992 είχε πετύχει 70 τέρματα και είχε συγκεντρώσει 64 βαθμούς .

13. Σε μια πόλη της Ελληνικής επαρχίας υπάρχουν δύο ενιαία Λύκεια, το 1° και το 2° . Στο 1° Λύκειο, ο αριθμός των επιτυχόντων (Y) μαθητών σε ΑΕΙ και ΤΕΙ εκτιμάται από την ευθεία $y = -70 + x$, όπου x ο αριθμός των μαθητών της Γ' Λυκείου με $x \in [80, 130]$. Αντίστοιχα, στο 2° Λύκειο εκτιμάται από την ευθεία $y = -60 + 2x$, $x \in [10, 50]$. Το 2000 υπάρχουν 140 μαθητές στη Γ' Λυκείου και στα δυο Λύκεια, ενώ το 1° εκτίμησε ότι θα έχει επιτυχία 30% . Να εκτιμήσετε το ποσοστό επιτυχίας του $2^{\text{ου}}$ Λυκείου .

14. Η ευθεία παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων που εκτιμά τη μεταβλητή Y σε σχέση με τη μεταβλητή x , διέρχεται από το σημείο $(5, 10)$. Αν ισχύει : $y = 3x - 5$ να προσδιορίσετε το y όταν το $x = 6$. Δίνεται ότι $x \neq 5$.

15. Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, που εκτιμά το βάρος (Y) των ανδρών πάνω στο ύψος (X), είναι παράλληλη στην αντίστοιχη ευθεία που αφορά τις γυναίκες. Γνωρίζουμε ότι γυναίκα ύψους 170 cm εκτιμάται 10 κιλά λιγότερο από άνδρα ίδιου ύψους. Αν η ευθεία των ανδρών διέρχεται από το σημείο $(185, 85)$ να εκτιμήσετε το βάρος ενός άνδρα με ύψος 190 και μιας γυναίκας με ύψος 160 όταν η ευθεία των γυναικών διέρχεται από το σημείο $(165, 60)$.

16. Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, που εκτιμά την ανεργία Y των κατοίκων της Γερμανίας ως προς τη χρονική στιγμή X , είναι κάθετη με την αντίστοιχη ευθεία της Βραζιλίας. Αν το ποσοστό της ανεργίας στη Βραζιλία τα έτη 1985 και 1990 ήταν 30% και 70% αντίστοιχα, να εκτιμήσετε το ποσοστό της ανεργίας στη Γερμανία το 1995 , όταν το 1985 ήταν 10% .

17. Από τη μελέτη των ετήσιων δεδομένων σχετικά με τις προσφερόμενες ποσότητες (v) ενός αγαθού, σε τόνους, και την τιμή του x , σε δεκάδες χιλιάδες δρχ. ανά τόνο, προέκυψαν τα παρακάτω δεδομένα την τελευταία 8-ετία:

$$\Sigma x = 115, \Sigma y = 235, \Sigma x^2 = 2.450, \Sigma xy = 4.850 .$$

Ζητείται:

α) Να προσδιοριστεί η εξίσωση παλινδρομήσεως $y = a + \beta x$.

β) Να ερμηνευτεί η παράμετρος β .

γ) Ποιες εκτιμάτε ότι είναι οι προσφερόμενες ποσότητες του αγαθού, όταν έχουμε: i) $x = 8$ και ii) $x = 12$.

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία παλινδρομήσεως $y = a - \beta x$.

18. Η ευθεία παλινδρόμησης που εκτιμά τη μεταβλητή Y σε σχέση με τη μεταβλητή X , διέρχεται από το σημείο $(2, 4)$. Αν $y_i = 8 - 2x_i$, $i=1, 2, \dots, v$, να εκτιμήσετε το Y όταν $x = 10$ και $x \neq 2$.

19.

x_i	2	2	6	κ
y_i	3	-1	3	λ

Θεωρούμε τον παρακάτω πίνακα για τις μεταβλητές X και Y . Υπολογίστε τα κ, λ ώστε η ευθεία παλινδρόμησης της Y πάνω στη X να έχει εξίσωση : $y = 0,75x - 0,5$.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης :

i) $f(x) = \sqrt{x}$ στο $x = 4$

ii) $g(x) = 3x^2 - 2x - 1$ στο $x = 1$

iii) $\sigma(x) = \frac{1}{x}$ στο $x = -1$

iv) $t(x) = x^4 + 1$ στο $x = -1$

v) $\varphi(x) = 2x^2 + 4x$ στο $x = 2$.

2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης :

i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ στο $x = 8$

ii) $g(x) = -\frac{1}{x^2+1}$ στο $x = -1$.

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ και να βρείτε

την $f'(3)$ αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ και .

4. Έστω συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο a . Ν.Δ.Ο :

i) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 f(x) - x^2 f(\alpha)}{x - \alpha} = \alpha^2 f(\alpha) - 2\alpha f(\alpha)$

ii) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(\alpha) \cdot f(x) - g(x) \cdot f(\alpha)}{x - \alpha} = g(\alpha) \cdot f(\alpha) - f(\alpha) \cdot g(\alpha)$.

5. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x \cdot g(x)$ είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό το σημείο και $f'(0) = g(0)$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω συμπέρασμα να δείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο

$f(x) = x + \sqrt[3]{x^6 \cdot (x+1)^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και βρείτε την $f'(0)$.

6. Μια επιχείρηση έχει κέρδη t^2 σε εκατομμύρια δραχμές στα πρώτα t έτη της λειτουργίας της.

i) Ποιος ο μέσος ρυθμός μεταβολής του κέρδους από $t = 2$ σε $t = 2,5$ χρόνια .

ii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους για $t = 2$.

7. Ένας κύβος έχει ακμή x που μεταβάλλεται.

- i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού επιφάνειας ως προς την ακμή του, όταν $x = 3$.
- ii) Να βρείτε το μήκος της ακμής του, όταν ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού επιφάνειας του κύβου είναι 6.

8. Ένας πληθυσμός βακτηριδίων συνεχώς αυξάνεται και μετά από t ώρες ζυγίζει $B(t) = 500 + t^3$ gr. Να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης των βακτηριδίων όταν : i) $t = 0$, ii) $t = 1$, iii) $t = 2$.

9. Ο όγκος V μιας σφαίρας ακτίνας r είναι $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της ως προς r όταν $r = 1$.

10. i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός ορθογωνίου με πλευρές $x + 2$ και $2x$ ως προς x όταν $x = 3$.

ii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ενός ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου ύψους $x + 1$ με βάση το ορθογώνιο του προηγούμενου ερωτήματος ως προς x όταν $x = 2$.

11. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

i) $f(x) = x^3$ στο $A(0, f(0))$

ii) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ στο $A(1, f(1))$

iii) $f(x) = x^2 + 3x$ στο $A(-1, f(-1))$.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

$$1. f(x) = 2x^{-4} \quad 2. f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad 3. f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \quad 4. f(x) = 2x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$5. f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 7 \quad 6. f(x) = \frac{x^2 + 9}{5} \quad 7. f(x) = x^2 + \sin x - 2 \quad .$$

2. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

$$1. f(x) = x^2 \cdot \eta\mu x \quad 2. f(x) = \frac{x^2}{\ln x} \quad 3. f(x) = \frac{\ln x}{x+2}$$

$$4. f(x) = 2x - 3\sqrt{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \quad 5. f(x) = x \cdot e^x \cdot \ln x \quad 6. f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{x^2 - 1}$$

$$7. f(x) = \frac{2x+1}{e^x} \quad 8. f(x) = 3\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \epsilon\phi x \quad .$$

3. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

$$1. f(x) = (2x+5)^4 \quad 2. f(x) = -\frac{3}{(4-x^2)^5} \quad 3. f(x) = \sigma\upsilon\nu^5 x \quad 4. f(x) = \sigma\upsilon\nu x^5$$

$$5. f(x) = 2\eta\mu^3(x^2+4) \quad 6. f(x) = 5\eta\mu(2x^2+1)^3 \quad 7. f(x) = \sqrt{3x^2-12}$$

$$8. f(x) = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x} \quad 9. f(x) = \frac{1}{3} \ln 3x \quad 10. f(x) = \ln \frac{2}{x^3} \quad 11. f(x) = \ln \frac{\epsilon\phi x}{x^2+1}$$

$$12. f(x) = \log_2(x^3+5) \quad 13. f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \quad 14. f(x) = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$15. f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x} \quad 16. f(x) = e^{\ln(x^2+1)} \quad 17. f(x) = e^{+x^2} \quad 18. f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

4. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

$$1. f(x) = e - \ln(2x-1) \quad 2. f(x) = -\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad 3. f(x) = 10\sqrt{x} - 20\ln(2+\sqrt{x})$$

$$4. f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x) \quad 5. f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu \sqrt{x^2+a^2}) \quad 6. f(x) = \log(\epsilon\phi x) \quad .$$

5. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

$$1. f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu(x^2+x)) \quad 2. f(x) = \sigma\upsilon\nu^3(2x^2+3x+4)^4 \quad 3. f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2(x^2-x))$$

$$4. f(x) = \ln(\ln(x^2+3x)) \quad 5. f(x) = \ln(\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x^2)) \quad 6. f(x) = \ln \sqrt[3]{(x^2-3x+1)^2}$$

$$7. f(x) = \eta\mu(\ln(\sigma\upsilon\nu^2(x+1))) \quad 8. f(x) = e^{\eta\mu(2x+1)^2} \quad .$$

6. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

1. $f(x) = x^x$ 2. $f(x) = x^{\eta\mu x}$ 3. $f(x) = x^{\ln x}$ 4. $f(x) = (\sigma\upsilon\nu x)^{\ln x}$
 5. $f(x) = 2^{\sigma\upsilon\nu x}$ 6. $f(x) = 3^{\sigma\upsilon\nu x + \ln x}$.

7. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων :

i) $y = \ln(3x^2 - 1)$ ii) $y = e$ iii) $y = \eta\mu^3 2x$
 iv) $y = \frac{x^2 + 3}{x + 2}$ v) $y = x^3 e^{-x}$ vi) $y = \ln(x^2 + 2)$.

8. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $y = e^x \eta\mu x$ επαληθεύει την σχέση :
 $y'' - 2y' + 2y = 0$.

9. Αν $f(x) = x \cdot e^{-x}$ να δείξετε ότι : $x^3 f''(x) - x f'(x) + f(x) = 0$.

10. Αν $f(x) = \alpha \cdot e^{-x} + \beta \cdot e^{-2x}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) να δείξετε ότι : $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11. Έστω συνάρτηση $f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $y = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$. Να δειχθεί ότι $y' + y \cdot \epsilon\phi x = \eta\mu 2x$.

12. Θεωρούμε την συνάρτηση $\sigma(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ με $g(x) \neq 0$. Αν $\sigma'(a) = 0$ για κάθε $a \in A$, να δειχθεί ότι: $\sigma(a) = \frac{f'(a)}{g'(a)}$. (f, g παραγωγίσιμες και $g'(a) \neq 0$) .

13. Αν $f(x) = g(x) + h(x)$ και $g'(x) = -h(x)$, $h'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι: $f''(x) + f'(x) = 0$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$.

- i) Να δείξετε ότι $f'(x) + f^2(x) = -1$
 ii) Αν $f''(x) = 0$ να δείξετε ότι $f(x) = 0$.

15. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln 3x$. Να βρείτε τις παραγώγους $f'(2x)$ και $(f(2x))'$. Τι παρατηρείτε ;

16. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ . Αν για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $5f^2(x) = 2g^3(x) - 48$ και $f(2) = 4, f'(2) = 1$, να βρείτε τα $g(2), g'(2)$ ($2 \in \Delta$) .

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

1. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(t) = \frac{e^t+1}{e^t+2}$ στο σημείο $A(0, f(0))$. Ομοίως της καμπύλης $f(\theta) = \frac{\eta\mu\theta}{2-\sigma\upsilon\nu\theta}$ στο σημείο $A(\pi, f(\pi))$.
2. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}(ax - x^3)$ στο σημείο της $O(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία 45° .
3. Να βρεθεί η Ε.Ε στο $x_0 = 2$ του διαγράμματος της $f(x) = x^3 - x$.
4. Να βρεθούν οι Ε.Ε της καμπύλης $f(x) = x^2 - x - 6$ στα σημεία που αυτή τέμνει τους άξονες.
5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 3x$ στο σημείο $A(x_0, y_0)$, αν η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία 45° με τον οριζόντιο άξονα.
6. Να βρεθούν οι Ε.Ε του διαγράμματος της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x$ στα σημεία που το διάγραμμα συναντά τον xx' .
7. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης C της f με $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ που είναι παράλληλες στον xx' .
8. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ που σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{3}$ με τον άξονα xx' .
9. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f με $f(x) = x^2 + ax + 1$ και g με $g(x) = 2x^2 + x + \beta$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 1$.
10. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = x^2 - 5x + 6$ που περνούν από το σημείο $M(1, -2)$.

11. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3 + \alpha}{2x + \alpha}$ στο σημείο $A(-1, f(-1))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα xx' .
12. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x) = -2\ln \frac{x+1}{x}$ που είναι παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας xOy .
13. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \sin^2 2x$ στο σημείο της με $x = \frac{\pi}{6}$.
14. Αν $f(x) = (\alpha - \beta)x^2 + (\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha - \beta - \gamma$ να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η εφαπτομένη στο σημείο $M(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ να σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα xx' .
15. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0, f(0))$ της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu(\frac{\pi}{6} + x^3)$.
16. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \eta\mu x^2$ στο σημείο $A(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1)$.
17. Έστω οι συναρτήσεις με τύπος $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \eta\mu 2x$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma\upsilon\nu 2x$ $x \in [0, 2\pi]$. Να βρείτε τους αριθμούς x_0 ώστε οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία με τετμημένες x_0 να είναι : i) παράλληλες ii) κάθετες .
18. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha \eta\mu x + \beta \epsilon\phi x$ $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η κλίση της f στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{\pi}{4}$ να είναι 4 και $4 + \sqrt{2}$ αντίστοιχα .
19. Να βρεθεί το α ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x$ να έχει στο σημείο $x_0 = 1$ εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία $y - 2x + 3 = 0$. Επίσης να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης .
20. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ που είναι κάθετη στην ευθεία $x - y - 2 = 0$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + \kappa x + \lambda$. Να βρεθούν οι $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η ευθεία $y=3x$ να εφάπτεται στο διάγραμμα της συνάρτησης στο σημείο $M(1, 3)$.
22. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 + 2$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
23. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = ax^2 - 2x + 9$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = \beta x$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(3, f(3))$.
24. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία τομής της με τους άξονες είναι παράλληλες.
25. Δίνονται οι συναρτήσεις f , με: $f(x) = x^2 + (\alpha+1)x + 2\beta + 1$ και g , με: $g(x) = \alpha x^2 + (\beta+2)x + 4\alpha$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f και g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = -1$.
26. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με: $f(x) = \alpha x^2 - 4x + \beta$ και $g(x) = \frac{\beta x}{x-1}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f και g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$.
27. Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 7$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, 9)$ να διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.
28. Δίνονται οι συναρτήσεις f , με $f(x) = \ln x$, και g με $g(x) = \ln^2 x - \ln x + 1$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα κοινό σημείο, και στο σημείο αυτό έχουν την ίδια εφαπτομένη.
29. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) \neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x και η συνάρτηση g με $g(x) = 2004 \frac{f(x)}{f'(x)}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f''(x_0) = 0$, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο $(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: \frac{y}{4} - 501x = 1$.
30. Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = x^2 \cdot \ln x, x > 0$.
- a) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $x \cdot f'(\frac{1}{x}) + f''(x) = 4$
- b) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, 0)$ εφάπτεται της C_g , με $g(x) = \frac{1}{4}(4x^2 - 3)$, στο σημείο $B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{ax} + 3$ με $a, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι :

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x + 1$ στο σημείο με τετμημένη $x = 0$ τότε $a = 2$.

β) Για την παραπάνω τιμή του $a \in \mathbb{R}$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Η ένταση του ηλιακού φωτός σε βάθος x μέτρα μιας θολής λίμνης ελαττώνεται εκθετικά ως προς x σύμφωνα με τον τύπο $I(x) = I_0 \cdot e^{-x}$ ($x \geq 0$) όπου I_0 η ένταση του φωτός στην επιφάνεια της λίμνης. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του I ως προς x .
2. Το ποσοστό των σπόρων ενός δέντρου που εξαπλώνονται σε απόσταση από τη βάση του μεγαλύτερη από r δίνεται από την συνάρτηση : $\rho(r) = \frac{3}{4} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} + \frac{1}{4} \left(\frac{r_0}{r}\right)$ όπου r_0 μια σταθερά. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του ποσοστού εξάπλωσης των σπόρων όταν $r = 2r_0$.
3. Η ακτίνα $r(\text{cm})$ ενός σφαιρικού μπαλονιού μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου $t(\text{sec})$ και δίνεται από τον τύπο $r(t) = 10e^{-t}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας του μπαλονιού κατά την χρονική στιγμή $t = 2\text{sec}$. ($E=4\pi r^2$ και $V=\frac{4}{3}\pi r^3$).
4. Χρωματιστό υγρό πέφτει σε ρούχο και απλώνεται σχηματίζοντας κυκλική κηλίδα της οποίας το εμβαδόν αυξάνει με ρυθμό μεταβολής $5\text{cm}^2/\text{min}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας κατά τη χρονική στιγμή κατά την οποία το εμβαδόν της κηλίδας είναι $36\pi \text{cm}^2$.
5. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους P σε χιλιάδες δραχμές ανά αντικείμενο όταν το εβδομαδιαίο κόστος παραγωγής είναι : $\kappa(x) = 40 + 5x + \frac{1}{4}x^2$ και η είσπραξη $E(x) = 60x - x^2$ στην περίπτωση που πωλούνται α) 20 αντικείμενα την βδομάδα, β) 30 αντικείμενα την βδομάδα.
6. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει και η ακτίνα της ελαττώνεται σύμφωνα με τον τύπο $R = 9 - 4t$, όπου t ο χρόνος σε sec και $0 \leq t \leq \frac{9}{4}$. Να βρείτε το ρυθμό μείωσης του όγκου και της επιφάνειας της μπάλας όταν $t = 1\text{sec}$.
7. Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10m του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το σημείο B κινείται με ταχύτητα $v = 2\text{m/sec}$ και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση $S(t) = v \cdot t$, $t \in [0, 5]$ όπου t ο χρόνος σε sec .
 - i) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου (OAB) ως συνάρτηση του t .
 - ii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του OA είναι 6m ;

8. Οι διαστάσεις x και y ενός ορθογωνίου αυξάνουν με ρυθμό 2cm/sec και 4cm/sec αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του εμβαδού του ορθογωνίου ως προς τον χρόνο t κατά την χρονική στιγμή t_0 που είναι $x = 25\text{cm}$ και $y = 32\text{cm}$.

9. Από ένα σφαιρικό μπαλόνι διαφεύγει αέριο με ρυθμό $3\text{cm}^3/\text{sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μείωσης της επιφάνειας του μπαλονιού όταν η ακτίνα του είναι 20cm .

10. Ένα κινητό σε χρόνο $t\text{ sec}$ διανύει διάστημα S σε m που δίνεται από τον τύπο $S(t) = t^3 + t^2 + t + 1$, $0 \leq t \leq 5$. Να βρείτε :

- i) την αρχική ταχύτητα του κινητού
- ii) τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του γίνεται 6 m/sec
- iii) τη χρονική στιγμή που η επιτάχυνσή του γίνεται 26 m/sec^2 .

11. Η θέση ενός υλικού σημείου που βάλλεται, με φόρα προς τα πάνω, από το έδαφος δίνεται από τον τύπο $y(t) = 5t(20-t)$, όπου t ο χρόνος της κίνησης σε sec .

- i) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου όταν $t = 11\text{sec}$. Τι συμπεραίνετε για την κίνηση του τη στιγμή αυτή;
- ii) Να βρείτε την αρχική ταχύτητα του σημείου και το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει.
- iii) Σε ποια χρονική στιγμή το ύψος του είναι 375m .

12. Εταιρεία κατασκευής ηλεκτρονικών υπολογιστών χρησιμοποιεί ως μοντέλο

πώλησης των προϊόντων της συναρτήσει του χρόνου τη σχέση $K(t) = \frac{80t}{t^2+4}$.

Όπου t ο χρόνος κυκλοφορίας του προϊόντος σε μήνες και $K(t)$ το πλήθος των H/Y που πουλά στο αντίστοιχο χρόνο σε χιλιάδες μονάδες.

α. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής των πωλήσεων της εταιρείας μετά την πάροδο ενός μήνα από την κυκλοφορία κάποιου νέου μοντέλου H/Y της στην αγορά.

β. Να βρεθεί πότε οι πωλήσεις κάποιου νέου μοντέλου H/Y της εταιρείας μεγιστοποιούνται.

γ. Να βρεθεί η μέγιστη ποσότητα σε χιλιάδες μονάδες που πουλά η εταιρεία.

13. Οι ημερήσιες εισπράξεις ενός καταστήματος που λειτουργεί όλο το εικοσιτετράωρο, δίνονται σε χιλιάδες Ευρώ, από τις τιμές της συνάρτησης f με

$f(t) = \frac{20t}{t^2+64}$, όπου ο χρόνος $t \in (0, 24)$ μετριέται σε ώρες και η μέτρηση του

αρχίζει αμέσως μετά τις 12 το μεσημέρι.

α. Να βρείτε πότε το κατάστημα πραγματοποιεί τις περισσότερες εισπράξεις και πόσες είναι αυτές.

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής των εισπράξεων, τη χρονική στιγμή κατά την οποία η επιχείρηση πραγματοποιεί τις περισσότερες εισπράξεις, καθώς και το χρονικό διάστημα στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής είναι θετικός.

γ. Αν είναι γνωστό ότι το κατάστημα έχει κέρδος όταν οι εισπράξεις είναι τουλάχιστον χίλια Ευρώ, να βρείτε το χρονικό διάστημα στο οποίο η επιχείρηση είναι κερδοφόρα.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
--

1. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

i) $f(x) = x^2 + 4x$ ii) $f(x) = 2 - x^2$ iii) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x - 1$
 iv) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{3}{4}$ v) $f(x) = -x^3 + 12x + 13$.

2. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα :

i) $f(x) = \alpha x^3$ $\alpha \neq 0$ ii) $f(x) = -x^3 - 6x + 7$ iii) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 16$
 iv) $f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + (\alpha - 6)x + 4$ και $0 < \alpha < 3$.

3. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων :

i) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ ii) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$
 iii) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x + 1$ iv) $f(x) = (x^2 - 1)^3$.

4. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων :

i) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$ iii) $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$
 iv) $f(x) = x - e^x$ v) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ vi) $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

5. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$

με τύπο $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$. Αν $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και $\alpha > \beta$ τότε να δείξετε : $\frac{\eta\mu^2 \alpha}{\eta\mu^2 \beta} > \frac{\sigma\upsilon\nu \alpha}{\sigma\upsilon\nu \beta}$.

6. Να βρεθούν τα α, β και γ ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $f(0) = 3$ να έχει τοπικά ακρότατα στα $x = 1$ και $x = \frac{1}{3}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{x} + \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) η οποία μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$.

- i) Να βρεθούν τα α και β .
 ii) Να βρεθεί το είδος του ακρότατου και η τιμή του.

8. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 12x$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$. Να καθορίσετε το είδος των ακρότατων.

9. Θεωρούμε συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ και ισχύει : $f'(\frac{4}{3}) = 0$.

10. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f^2(x) + f(x) = x^3 + 2x$ να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

11. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln^2 x + \alpha \ln x + \beta x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα α, β ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = e$ και $f'(e^3) = 0$.

12. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ και ισχύει $f(1) = -6$. Θεωρούμε συνάρτηση g με $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$.
Να αποδείξετε ότι $g'(1) = 3$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{11} + x^3 + x$.

α) Να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι : $f(\pi^2 + e^2) > f(2\pi e)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + 1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η f να παρουσιάζει στο $x_0 = 2$ ακρότατο με τιμή -1 .

15. Δίνεται η συνάρτηση f με : $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + 2x$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(2, f(2))$ να είναι κάθετη στη ευθεία $8y - x + 9 = 0$.

16. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 2\alpha x + 5\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το α ώστε το ελάχιστο της συνάρτησης f να παίρνει τη μέγιστη τιμή.

17. Έστω f συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Και για την πρώτη παράγωγο της f ισχύει : $(x^2 + 1)^2 \cdot f'(x) = 5(\alpha - x^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

A1. Αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο σε σημείο με τετμημένη $x = 2$. Να αποδειχθεί ότι $\alpha = 4$.

A2. Για την παραπάνω τιμή του α

α. Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι ίσος με $\frac{15}{4}$.

β. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση f .

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^x - \beta x + 3$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθούν οι τιμές των α, β αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 4)$ και η εφαπτομένη της C_f στο A είναι $// x'x$.

β. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο A .

γ. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της και τα ακρότατα.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 + (2-\lambda)x - \frac{3}{4}\lambda - 1$, $\lambda > 0$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε το ελάχιστο της f να είναι μέγιστο.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{ax} - \beta x$, $a, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η τιμή του a ώστε $4f'(x) - 4\beta(x-1) = 4f(x) + f''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε το β ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $(0, f(0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

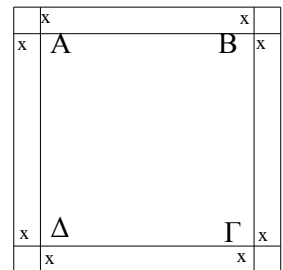
γ) Για τις τιμές των a, β που βρήκατε να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

ΜΕΓΙΣΤΑ – ΕΛΑΧΙΣΤΑ

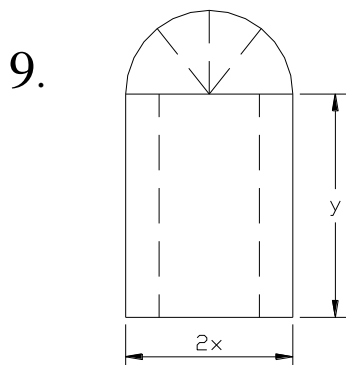
1. Το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι 16. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το άθροισμά τους .
2. Από όλα τα ορθογώνια που κατασκευάζουμε με σύρμα μήκους 40 m ποίο είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν ;
3. Από όλα τα ισοσκελή τρίγωνα με περίμετρο 18cm ποιο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν ;
4. Δίνεται η συνάρτηση $y = \sqrt{5 - x^2}$. Να βρείτε το σημείο της που είναι πλησιέστερο στο σημείο A(3, 6) .
5. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $3x^2 + (\lambda - 6)x - \lambda = 0$ να είναι ελάχιστο και να βρεθεί .
6. Να βρείτε ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = (\lambda - 1)x^2 - \lambda(x - 1)^2$ να γίνεται ελάχιστη .
7. Το κόστος $\kappa(x)$ σε δρχ/Km σωλήνα που τροφοδοτεί με νερό ένα απομακρυσμένο εργοστάσιο δίνεται από την συνάρτηση κ με τύπο :

$\kappa(x) = \frac{1200}{x^2} + 4800x$ όπου x η διατομή του σωλήνα σε cm^2 . Να βρείτε τη διατομή του σωλήνα για την οποία το κόστος είναι ελάχιστο και την ελάχιστη τιμή κόστους ανά Km.

8. Από φύλλο λαμαρίνας που έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά 2,4 m θέλουμε να κατασκευάσουμε ανοιχτό δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, κόβοντας από τις 4 γωνίες του ίσα τετράγωνα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Να βρείτε την πλευρά x του τετραγώνου ώστε το δοχείο που θα κατασκευάσουμε να έχει τη μέγιστη χωρητικότητα .



9.

Ένα παράθυρο αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και από ένα ημικύκλιο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν η περίμετρος είναι $4 + \pi$ μέτρα πως πρέπει να κατασκευάσουμε το παράθυρο για να έχουμε το μεγαλύτερο δυνατό φωτισμό .